Apostila de Matemática Aplicada

Volume 1 – Edição 2004

Prof. Dr. Celso Eduardo Tuna

Capítulo 1 - Revisão

Neste capítulo será feita uma revisão através da resolução de alguns exercícios, dos principais tópicos já estudados.

Os tópicos selecionados para esta revisão são:

Cálculo Numérico;
Cálculo com Números percentuais;
Cálculo algébrico;
Equações e Sistemas do 1º grau;
Equações e Sistemas do 2º grau.

1.1 Cálculo Numérico

Operações com frações

Adição e Subtração: usamos o menor múltiplo comum.

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{5}-\frac{1}{6}=\frac{15+18-5}{30}=\frac{28}{30}=\frac{14}{15}$$

Multiplicação: O produto de duas frações é uma fração que tem por numerdor o produto dos numeradores e que tem por denominador o produto dos denominadores.

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

Divisão: O quociente de duas frações é uma fração resultante do produto da primeira fração pelo inverso da segunda fração.

$$\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Cálculo do valor de expressões numéricas: deve-se obedecer à prioridade dos sinais indicativos e das operações matemáticas.

Prioridade dos Sinais		Prioridade das Operações	
1	( )	1	Exponenciação e Logaritmação
2	[ ]	2	Potenciação e Radiciação
3	{ }	3	Multiplicação e Divisão
		4	Adição e Subtração

Calcule o valor numérico das expressões:

a) $2+\{5[3-(5-10)+1]+4\}-3$

R: 48

b) $\frac{4}{3}+\frac{7}{5}\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{9}\right)-\frac{1}{5}$

R: 221/90 ou 2,46

c) $\left(\frac{43}{11}+\frac{1}{10}\right)\times\left(\frac{17}{8}-\frac{2}{5}\right)$

R: 30429/4400 ou 6,92

d) $\dfrac{\frac{4}{5}\left(\frac{7}{3}-1\right)}{\frac{2}{9}-3}$

R: -48/125 ou - 0,38

e) $3\left\{-1+12\left[-13+4\left(1-\frac{1}{3}\right)-1\right]-1\right\}$

R: -414

Potenciação

<u>Potenciação de expoente inteiro:</u> Seja *a* um número real e *m* e *n* números inteiros positivos. Então:

$a^n = a.a.a.a.....a$ (n vezes)

$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$

$a^0 = 1$

$a^n \div a^m = a^{m-n} \rightarrow a \neq 0$

$a^1 = a$

$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$

$a^{-n} = \frac{1}{a} \rightarrow a \neq 0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \rightarrow b \neq 0$

a) $\frac{1}{4}+5^3-2^{-4}$

R: 2003/16 ou 125,1875

b) $2^{-3}+(-4)^{-5}$

R: 127/1024

c) $1^4 + (-2)^4 - (-2)^3 + 0^7 + 32^0 + 8 \cdot 2$

R: 42

d) $\left(\dfrac{4}{5} - \dfrac{1}{2} + 1\right)^{-2} + \dfrac{1}{1 + 3^2 - (4-5)^{-2}}$

R: 1069/1521

<u>Potenciação de expoente não inteiro:</u> Toda raiz pode ser escrita na forma de potência.

$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

Observação: se *n* for par e se *a < 0*, não caracteriza um número real:

$\sqrt{-25} \notin R$

a) $-(-2)^3 + (-1)^0 - \sqrt{25 - 3^2} - 5^3 \div 25$

R: 0

b) $\dfrac{-(-2)^2 - \sqrt[3]{27}}{(-3+5)^0 - 2}$

R: 7

Exercícios

1) Calcule o valor das expressões:

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{4}{5} + \frac{2}{5} \div \left(\frac{2}{3}\right)^3$

R: 7/5

b) $\dfrac{\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{4}} + \dfrac{\frac{1}{5}}{\left(1-\frac{4}{5}\right)^2}$

R: 17/3

c) $\frac{1}{4} + 0{,}19 \div \left(4 - 0{,}8 \div 0{,}5 - \frac{1}{2}\right)$

R: 7/20

d) $\dfrac{0{,}1 - 0{,}01}{0{,}2 - 0{,}02}$

R: 1/2

2) Aplicando as propriedades das potências, simplifique as expressões:

a) $\dfrac{256 \cdot 4^9}{8^7}$

b) $\dfrac{9^3 \cdot 27^4 \cdot 3^{-7}}{\frac{1}{3} \cdot 243^2}$

c) $\dfrac{125^6 \cdot 25^{-3}}{\left(5^2\right)^{-3} \cdot 25^7}$

d) $\dfrac{12 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} \cdot 10^9}{3 \cdot 10^{-1} \cdot 10^4}$

Respostas: a) $2^5 = 32$ b) $3^2 = 9$ c) $5^4 = 625$ d) 0,4

3) Escreva os números abaixo como o produto de um número inteiro por uma potência de 10:

a) 0,3 =

b) 3000 =

c) 0,005 =

d) 0,0625 =

e) 3,45 =

f) 8000000 =

4) Calcule o valor de:

a) $\sqrt[6]{64}$ =

b) $\sqrt[4]{81}$ =

c) $25^{1/2}$ =

d) $8^{1/3}$

5) Calcule o valor das expressões:

a) $-\sqrt[3]{8}+16^{1/4}-(-2)+27^{1/3}$

b) $4\cdot 0{,}5^{4}+\sqrt{0{,}25}+8^{-2/3}$

R: a) 5 b) 1

6) Simplifique os radicais:

a) $\sqrt{2352}$

b) $\sqrt[3]{32}$

c) $\sqrt[5]{1024}$

R: a) $28\sqrt{3}$ b) $2\sqrt[3]{4}$ c) 4

7) Racionalize os denominadores das expressões:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

8) Efetue:

a) $\frac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{5}}+\frac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{5}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{18}}-\frac{1}{\sqrt{8}}$

Respostas: a) $\frac{-2-\sqrt{15}}{2}$

b) $\frac{5\sqrt{2}}{12}$

1.2 Cálculo com Números Percentuais

Os números percentuais são identificados pela notação % e aparecem com muita freqüência.

Para transformar um número percentual em um número real, devemos dividi-lo por 100.

70 % = 70 / 100 = 0,7
5 % = 5 / 100 = 0,05
200 % = 200 / 100 = 2

Para transformar um número real em um número percentual, devemos multiplica-lo por 100.

0,43 => 0,43 x 100 = 43 %
1 => 1 x 100 = 100 %

Exercícios:

a) Calcular 20 % de R$ 1.700,00

R: R$ 340,00

b) Uma mercadoria foi comprada por R$ 50,00 e vendida por R$ 80,00. Determine a taxa de lucro sobre o preço de compra e a taxa de lucro sobre o preço de venda.

Utilize $\frac{p}{P} = i$, onde *p* é a parte; *P* é o todo (ou principal) e *i* é a taxa na forma real

R: a) 60 % b) 37,5 %

c) Um comerciante remarcou em 5% o preço de suas mercadorias. Qual é o novo preço de uma mercadoria que era vendida por R$ 70,00.

R: R$ 73,50

d) Um vestido estava exposto em uma loja com preço de etiqueta de R$ 210,00. Um cliente, alegando que faria pagamento à vista, solicitou um desconto de 15 % e foi atendido. Quanto pagou pelo vestido ?

R: R$ 178,50

e) Um funcionário recebe um salário base de R$ 800,00. Recebe um adicional de 5 % por tempo de serviço sobre o salário base. Recebe também uma gratificação de chefia de 30 % sobre o salário base. Desconta-se 10 % de INSS sobre o salário total. Quanto recebe esse funcionário ?

R: R$ 972,00

f) Uma pessoa recebe mensalmente R$ 2.500,00 de salário de uma empresa. Recebe R$ 1.500,00 de aluguel de um ponto comercial e R$ 1.000,00 de rendimento de aplicações financeiras. Qual a participação percentual de cada fonte em sua renda total ?

R: 50 % , 30 % , 20 %

1.3 Cálculo algébrico.

1) Calcule os valor numérico das expressões:

a) $a^3 + b^3 - 2a^2 + 4ab + 1$, para a = 2 e b = -3

b) $\dfrac{xy - x^2}{\sqrt{y}}$, para $x = -\dfrac{1}{10}$ e $y = \dfrac{1}{100}$

Resposta: a) 29 b) $-\dfrac{11}{100}$

2) Simplifique as expressões reduzindo-as ao máximo:

a) $3(a^2 + a + 1) + 2(a^2 + 2a - 2) - (a^2 + 3a - 3)$

b) $a(a+b-c)+b(b+c-a)+c(a-b+c)$

Respostas: a) $4a^2+4a+2$ b) $a^2+b^2+c^2$

Produtos notáveis:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

3) Desenvolva os seguintes produtos notáveis:

a) $(2x+3)^2$

b) $(3x-y)^2$

c) $(5x+1)\cdot(5x-1)$

d) $(2a^2+3b)\cdot(2a^2-3b)$

4) Simplifique as expressões:

a) $(x-2)^2+x^2-2(x-1)^2$

b) $(m-1)^2-(m+1)\cdot(m-1)$

c) $\dfrac{3x^4-10x^2}{x^5-x^2}$

d) $\dfrac{x^2-16}{x+4}$

e) $\dfrac{(x+3)^2}{x^2-9}$

f) $\dfrac{xy^2-x^2y}{2xy}$

g) $\dfrac{x^2+10x+25}{x+5}$

h) $\dfrac{x^2+6x+9}{2x+6}$

i) $\dfrac{y-z}{x+w} \div \dfrac{y^2-z^2}{x^2-w^2}$

Respostas: a) 2 b) -2m+2 c) $\dfrac{3x^2-10}{x^3-1}$ d) $x-4$ e) $\dfrac{x+3}{x-3}$ f) $\dfrac{y-x}{2}$
g) x+5 h) $\dfrac{x+3}{2}$ i) $\dfrac{x-w}{y+z}$

5) Efetue as operações indicadas:

a) $\dfrac{x+3}{2(x+1)} \cdot \dfrac{(x+1)^2}{(x+3)\cdot(x-3)}$

b) $\dfrac{1-x+\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1-x^2}}$

Respostas: a) $\dfrac{x+1}{2(x-3)}$ b) $(1-x)^2$

1.3 Equações e sistemas do 1º grau.

1) Resolva as equações:

a) $\dfrac{x-2}{4}+\dfrac{2x+8}{5}=5$

b) $\frac{x+1}{x}-\frac{x-2}{x+1}=\frac{17}{x^2+x}$

Respostas: a) $x = 6$ b) $x = 4$

2) Um produto teve seu preço aumentado em 20% para pagamento a prazo, resultando em um total de R$ 600,00. Qual era o preço a vista do produto?

R: 500

3) Duas pessoas tem juntas R$ 135,00. Quanto cada uma possui, sabendo-se que uma possui o dobro da outra?

R: 45 e 90

4) Uma pessoa fez um acordo com uma administradora para pagar o saldo de seu cartão de crédito em três vezes sem juros. O primeiro pagamento corresponde à metade da dívida e o segundo pagamento. R$ 300,00. Qual o valor da dívida, se o último pagamento era de 20 % da dívida original?

R: 1000

5) Resolva os sistemas de equações do 1º grau

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 9y = -47 \\ -x + 20y = 101 \end{cases}$

Respostas: a) 4 , 1 b) 1 , 2 c) -1 , 5

6) A soma de dois números é 21 e a sua diferença é 51. Calcule os dois números.

Resposta: -15 e 36

7) Um aluno ganha 5 pontos por exercício que acerta e pede 3 pontos por exercício que erra. Ao fim de 50 exercícios tinha 130 pontos. Quantos exercícios ele acertou?

Resposta: 35

8) A diferença entre as idades de duas pessoas é 15 anos. Daqui a dois anos, a mais velha terá o dobro da idade da mais nova. Qual é a idade de cada uma?

R: 28 e 13 anos

1.4 Equações e sistemas do 2º grau.

1) Resolva as equações:

a) $2x^2 - 50 = 0$

b) $(2x+1)^2 - 5(x+1) + 4 = 0$

c) $\dfrac{x-3}{x^2-4} + 1 = \dfrac{1}{x-2}$

d) $5x^2 + 6x + 1 = 0$

Resposta: a) -5, 5 b) 0, 3/2 c) -3, 3 d) -1, -1/5

2) Resolva os seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y = 23 \end{cases}$

Respostas: a) (-1;3),(3;-1) b) (4;5) , (5;4)

3) Resolva:

a) $x^4 + x^2 - 2 = 0$

b) $\sqrt{x^2 - 5x - 20} = 2$

c) $\sqrt{2x^2 + x - 6} = x + 2$

Respostas: a) -1, 1 b) -3, 8 c) -2, 5

4) Um jardim de forma retangular tem 96 m^2 de área. Se aumentarmos o comprimento desse jardim em 3 m e a largura em 2 m, a área do jardim passa a ter 150 m^2. Calcule as dimensões originais do jardim.

Resposta: c = 12 m e l = 8 m

Capítulo 2 - Funções

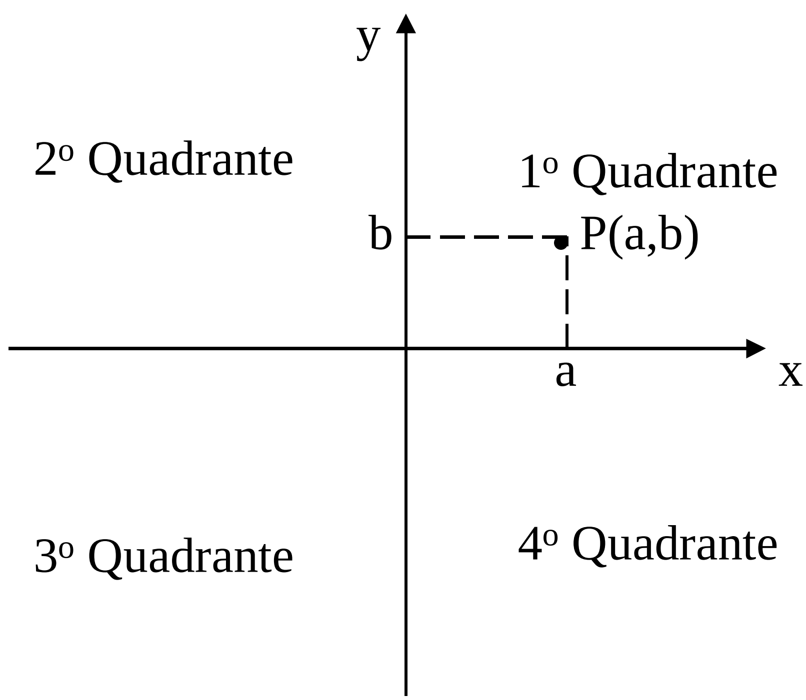
2.1 Definição

Uma função é um conjunto de pares ordenados de números (x,y) no qual duas duplas ordenadas distintas não podem ter o mesmo primeiro número, ou seja, garante que ***y*** seja único para um valor específico de ***x***. Em outras palavras, o valor de ***y*** depende do valor de ***x***.

Exemplo: a área de um quadrado é função do comprimento do seu lado; o salário é função das horas trabalhadas; o número de unidades de certo produto demandadas pelos consumidores depende de seu preço; etc.

2.2 Sistema Cartesiano Ortogonal

É um sistema constituído por dois eixos, ***x*** e ***y***, perpendiculares entre si. O eixo ***x*** é denominado eixo das **abscissas** e o eixo ***y*** é o eixo das **ordenadas**. Esses eixos dividem o plano em quatro regiões chamadas **quadrantes**.



Esse sistema é utilizado para localizar um ponto no plano; assim, o ponto P(a,b) indicado na figura tem abscissa ***a*** e ordenada ***b***. (a,b) é denominado par ordenado e representam as coordenadas do ponto P.

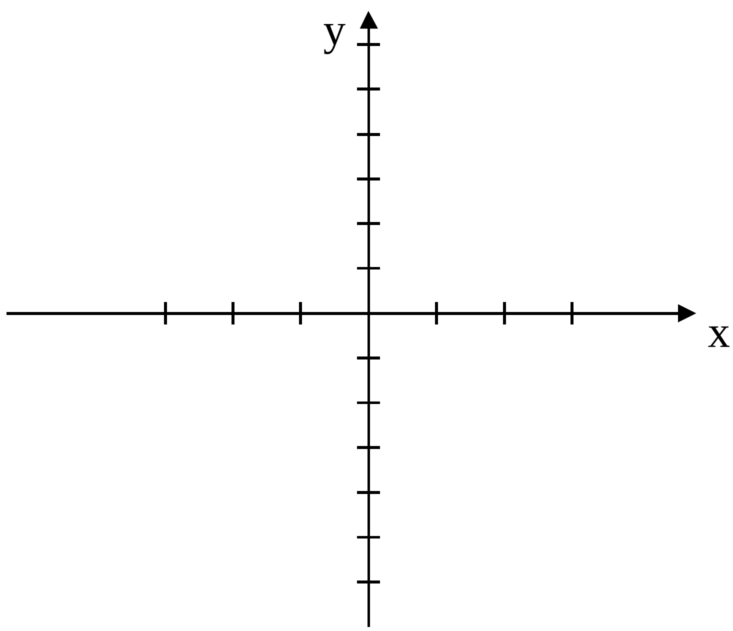
2.3 Função Polinomial do 1º grau

Toda função polinomial representada pela fórmula **f(x) = ax+b** ou **y = ax+b**, definida para todo ***a***,***b*** e ***x*** reais e com ***a*** diferente de zero, é denominada função do 1º grau.

Exercício: Construa no plano cartesiano o gráfico da seguinte função:

y = 2x-1

x	-2	-1	0	1	2	3
y						



Observação:

1) para ***a*** > 0 a função do 1º grau é crescente, e para ***a*** < 0 ela é decrescente.

2) denomina-se zero ou raiz da função f(x)=ax+b o valor de ***x*** que anula a função, isto é, torna f(x)=0

Exercício: Calcule a raiz da função do exemplo acima:

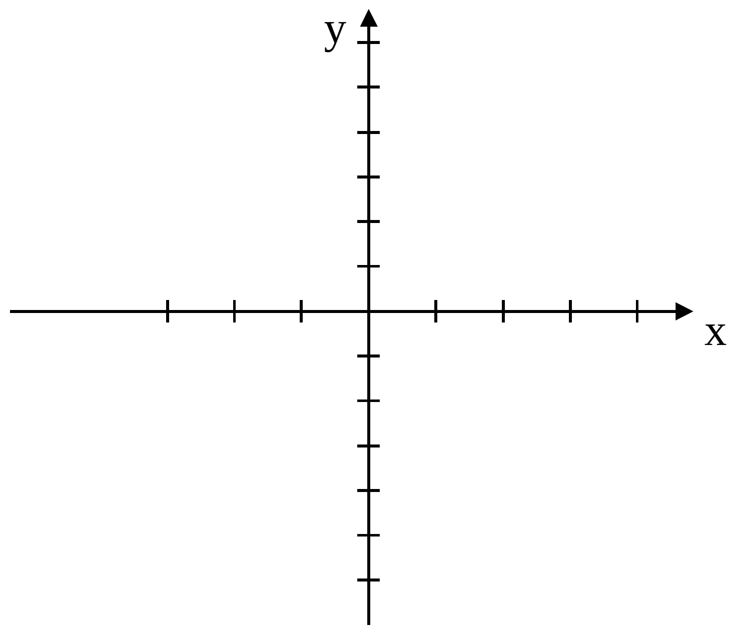
2.4 Função Polinomial do 2º grau

Toda função polinomial representada pela fórmula **f(x) = ax²+bx+c** ou **y = ax²+bx+c**, definida para todo ***a***,***b***,***c*** e ***x*** reais e com ***a*** diferente de zero, é denominada função do 2º grau ou função quadrática.

Exercício: Construa no plano cartesiano o gráfico da seguinte função:

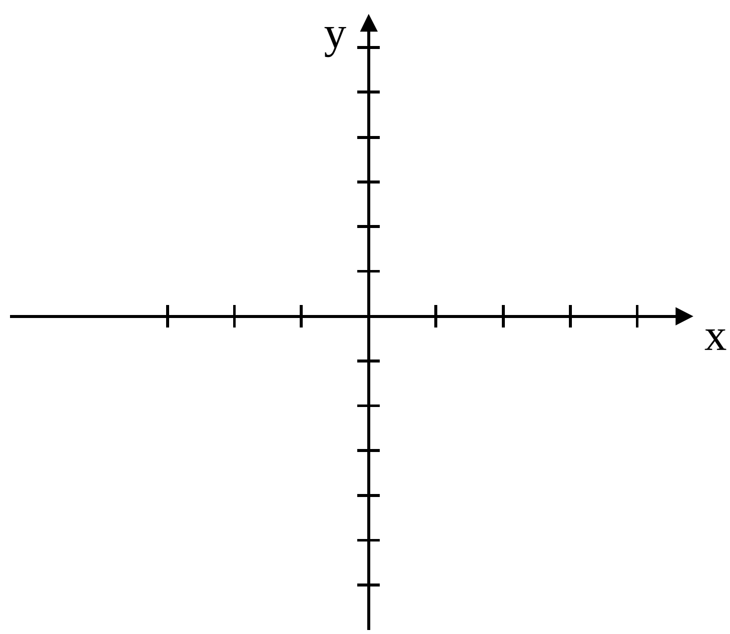
a) $\mathbf{y = x^2 - 2x - 3}$

X	-2	-1	0	1	2	3	4
Y							



b) y = $\mathbf{- x^2 + 2x + 3}$

X	-2	-1	0	1	2	3	4
Y							



Observação:

1) para $\boldsymbol{a} > 0$ o gráfico da função do 2^o grau é uma parábola com concavidade voltada para cima, e para $\boldsymbol{a} < 0$ ela é uma parábola com concavidade voltada para baixo.

2) denomina-se zero ou raiz da função $f(x)=ax^2 + bx + c$ o valor de $\boldsymbol{x}$ que anula a função, isto é, torna $f(x)=0$

3) no cálculo das raízes tem-se:
Se $\Delta > 0$ a função tem duas raízes (zeros) diferentes
Se $\Delta = 0$ a função tem uma raiz (zero)
Se $\Delta < 0$ a função não tem raízes (zeros)

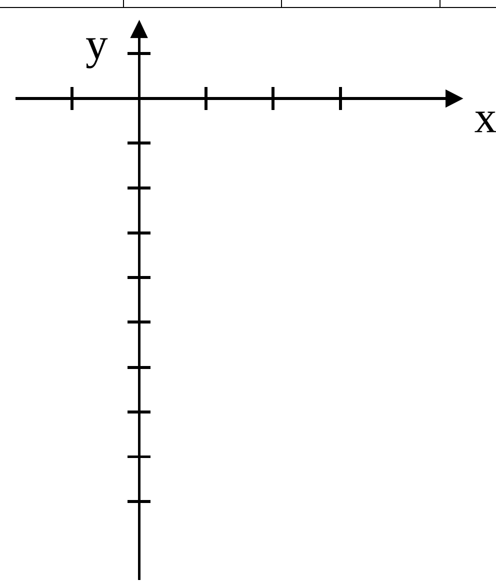
4) o vértice da parábola é um ponto que é determinado por $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

5) quando $a > 0$ (concavidade para cima), o vértice é o ponto de mínimo da função. Quando $a < 0$ (concavidade para baixo), o vértice é o ponto de máximo da função.

Exercícios: Construa no plano cartesiano o gráfico das seguintes funções e determine os pontos de máximo ou de mínimo, conforme o caso:

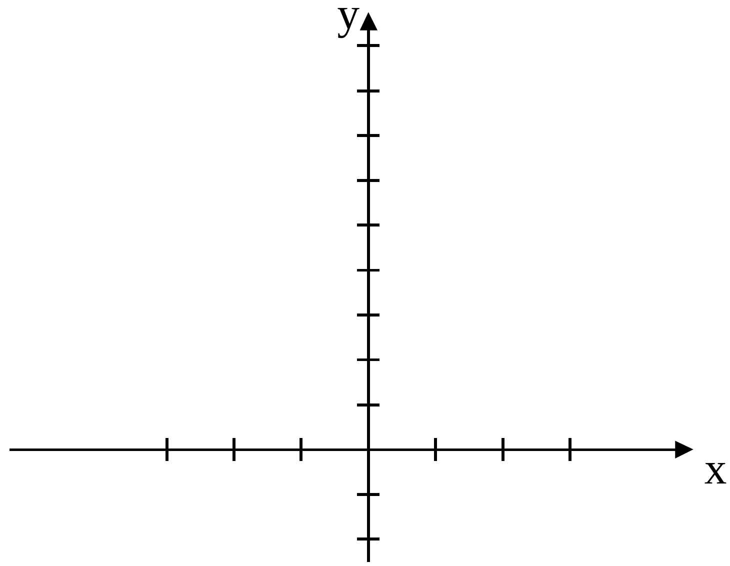
a) $\mathbf{y = - x^2 + 2x - 4}$

X	-1	0	1	2	3
Y					



b) y = $\mathbf{2x^2}$

X	-2	-1	0	1	2
Y					

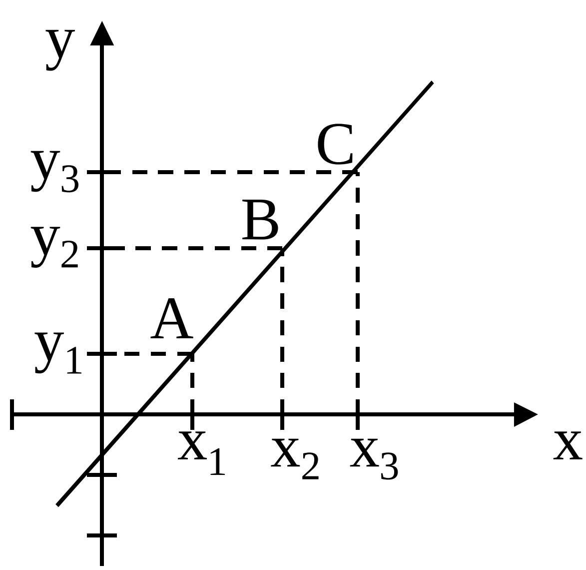


Capítulo 3 - Estudo da Reta

3.1 Condição de alinhamento de 3 pontos

Se três pontos estão alinhados, ou seja, pertencem a mesma reta, deve-se satisfazer a seguinte condição:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$



Exercício: Verifique se os pontos A, B e C estão alinhados:

a) A(-2,6) B(4,8) C(1,7)

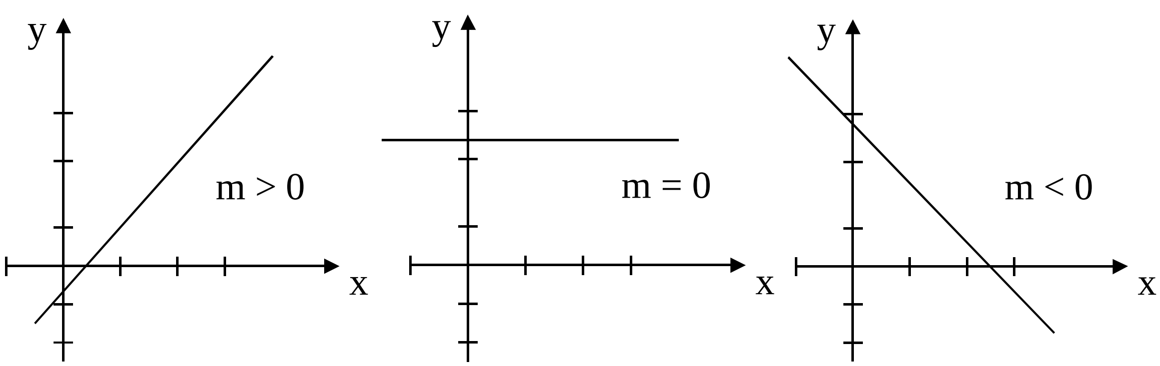
b) A(0,2) B(-3,1) C(4,5)

3.2 Coeficiente angular ou inclinação de uma reta (m).

É o valor que expressa a tangente trigonométrica do ângulo de inclinação da reta.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Obs: Duas retas são paralelas quando seus respectivos valores de ***m*** forem iguais. Quando forem perpendiculares $m_1 = -\frac{1}{m_2}$



Observação: quando a reta ficar na vertical, todos os seus pontos possuem a mesma abscissa ($x_1 = x_2$), e o valor de ***m*** tende ao infinito.

3.3 Equação geral e reduzida de uma reta.

A equação geral é do seguinte formato:

$$(y - y_1) = m(x - x_1),$$

resultando em:

$$ax + by + c = 0$$

Exemplo: Determine a equação da reta que passa pelos pontos A(-1,-2) e B(5,2).

Solução: primeiro determina-se o valor de *m*.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-(-2)}{5-(-1)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

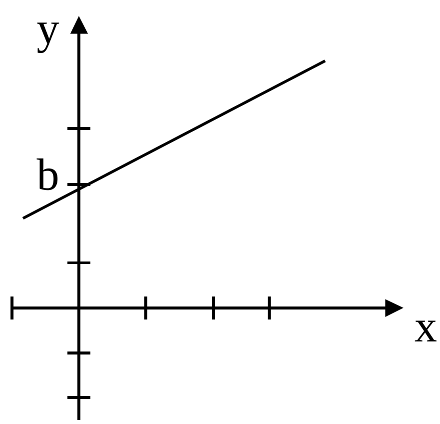
Utilizando o ponto A:

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$
$$(y-(-2)) = \frac{2}{3}(x-(-1))$$
$$(y+2) = \frac{2}{3}(x+1)$$
$$3(y+2) = 2(x+1)$$
$$3y + 6 = 2x + 2$$
$$-2x + 3y + 6 - 2 = 0$$
$$2x - 3y - 4 = 0$$

A equação reduzida é da seguinte forma:

$$y = mx + b$$

o que graficamente pode ser representado por:



No exemplo anterior tem-se utilizando *m* = 2/3 e o ponto A:

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \Rightarrow (y-(-2)) = \frac{2}{3}(x-(-1)) \Rightarrow$$
$$(y+2) = \frac{2}{3}(x+1) \Rightarrow y + 2 = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow$$
$$y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} - 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

Exercícios:

1) Dada a reta de equação 2x - y + 5 = 0, escreva a equação da reta paralela à reta dada e que passa pelo ponto A(-2,2)

Resposta: 2x -y + 6 = 0

2) São dados os pontos A(4,3) e B(-2,-5). Determine a equação da reta *t*, que passa pelo ponto C(8,-6) e que é paralela à reta determinada pelos pontos A e B.

Resposta: 4x - 3y -50 = 0

3.4 Interseção de retas.

Consideremos duas retas ***r*** e ***s***, que se interceptam num ponto P(a,b). Como o ponto P deve pertencer as duas retas, suas coordenadas (a,b) devem satisfazer as equações das duas retas, simultaneamente. Portanto, obtemos as coordenada (a,b) do ponto P, resolvendo o sistema formado pelas equações das duas retas.

Exemplo: Determine o ponto de interseção das retas $x + y - 4 = 0$ e $2x - y + 1 = 0$

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{3x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1}$$

$$1 + y - 4 = 0 \Rightarrow y = 3$$

P(1,3)

Pode-se também igualar as equações na sua forma reduzida:

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \Rightarrow y = -x + 4 \\ 2x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$-x + 4 = 2x + 1$$

$$-x - 2x = 1 - 4$$

$$-3x = -3$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 3$$

3.5 Aplicação em administração

Exemplo: Uma empresa investe R$ 1800 em equipamentos. O contador da empresa usa o método da linha reta para a depreciação em 10 anos, que é a estimativa de vida do equipamento, isto é, o valor contábil do equipamento decresce a uma taxa constante, de tal forma que ao fim dos 10 anos aquele valor contábil será zero. Suponhamos que o valor contábil do equipamento seja ***y*** ao fim de ***x*** anos. Assim, quando x =0 , y = 1800, e quando x = 10 , y = 0. A equação da reta que dá a relação entre *x* e *y* é a da reta que une os pontos (0,1800) e (10,0), então:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 1800}{10 - 0} = -180$$

Utilizando o ponto (10,0):

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$
$$(y - 0) = -180(x - 10)$$
$$y = -180x + 1800$$

Observe que a inclinação da reta é -180, e este número dá a quantia segundo a qual o valor contábil muda a cada ano; decresce R$ 180 por ano.

Exercícios:
1) Uma companhia comprou uma máquina no valor de R$ 15000. Sabe-se que o valor residual após 10 anos será de R$ 2000. Usando o método da linha reta para depreciar a máquina de R$ 15000 para R$ 2000 em 10 anos, qual o valor da maquinaria depois de 6 anos ?

Resposta: R$ 7200

2) O fabricante de determinada mercadoria tem um custo total consistindo de despesas gerais semanais de R$ 3000 e um custo de manufatura de R$ 25 por unidade. (a) Se x unidades são produzidas por semana e y é o custo total semanal, escreva uma equação relacionando x e y. (b) Faça um esboço do gráfico da equação obtida em (a).

3) O custo total para um fabricante consiste de um custo de manufatura de R$ 20 por unidade e de uma despesa diária fixa. (a) Se o custo total para produzir 200 unidades em 1 dia é de R$ 4500, determine a despesa fixa diária. (b) Se x unidades são produzidas diariamente e y é o custo total diário, escreva uma equação relacionando x e y. (c) Faça um esboço do gráfico da equação obtida em (b).

4) Uma fábrica de equipamentos eletrônicos está colocando um novo produto no mercado. Durante o primeiro ano o custo fixo para iniciar a nova produção é de R$ 140.000 e o custo variável para produzir cada unidade é R$ 25. Durante o primeiro ano o preço de venda é de R$ 65 por unidade. (a) Se x unidades são vendidas durante o primeiro ano, expresse o lucro do primeiro ano como uma função de x. (b) Se 23.000 unidades forem vendidas, qual será o lucro. (c) Quantas unidades precisam ser vendidas para não haver prejuízo ?

Respostas: b) 780.000 c) 3.500

5) O custo mensal de uma fábrica que produz esquis é de R$ 4.200, e o custo variável de R$ 55 por par de esquis. O preço de venda é de R$ 105. (a) Se x unidades são vendidas durante um mês, expresse o lucro mensal como uma função de x. (b) Se 600 pares forem vendidos em um mês, qual será o lucro. (c) Quantas unidades precisam ser vendidas para não haver prejuízo durante um mês ?

Respostas: b) 25.800 c) 84

6) Um fabricante de relógios pode produzir um determinado relógio a um custo de R$ 15 por unidade. Está estimado que se o preço de venda for *x*, o número de relógios vendidos por semana será de 125 - x. (a) Expresse o lucro semanal como uma função de *x*. (b) Se R$ 45 for o preço de venda, qual será o lucro semanal ? (c) Qual o valor de venda para se obter um lucro máximo ?

Respostas: b) 2.400 c) 70

7) Um fabricante de brinquedos pode produzir um determinado brinquedo a um custo de R$ 10 cada um, estima-se que se o preço de venda for *x*, o número de brinquedos vendidos por dia será de 45 - x. (a) Expresse o lucro diário como uma função de *x*. (b) Se R$ 30 for o preço de venda, qual será o lucro diário ? (c) Qual o valor de venda para se obter um lucro máximo ?

Respostas: b) 300 c) 27,5

3.6 Equações de Demanda e de Oferta

Geralmente, a quantidade de mercadoria demandada no mercado pelos consumidores irá depender do preço da mesma. Quando o preço baixa, os consumidores procuram mais a mercadoria. Caso o preço suba, os consumidores procurarão menos.

Seja ***p*** o preço de uma unidade e ***x*** o número e unidades demandadas, uma relação entre ***p*** e ***x*** é denominada **equação de demanda**. Para representar essa equação em um gráfico, usualmente utiliza-se o eixo vertical para o preço e o horizontal para a demanda.

Exemplo: Uma companhia de turismo tomou conhecimento de que quando o preço de uma visita a pontos turísticos é de R$ 6, a média do números de ingressos vendidos por viagem é 30, e quando o preço passa a R$ 10, o número médio de ingressos vendidos é somente 18. Supondo linear a equação de demanda, encontre-a e trace um esboço.

Solução: A equação da reta que dá a relação une os pontos (30,6) e (18,10), então:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-6}{18-30} = -\frac{1}{3}$$

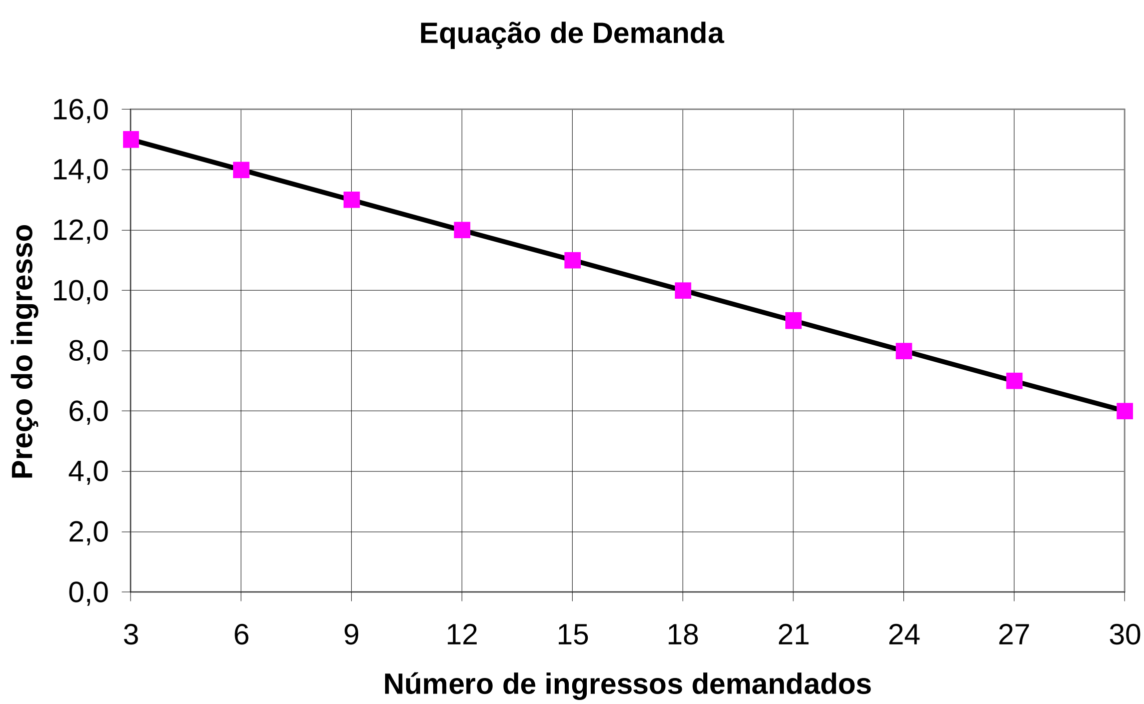
Utilizando o ponto (30,6):

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

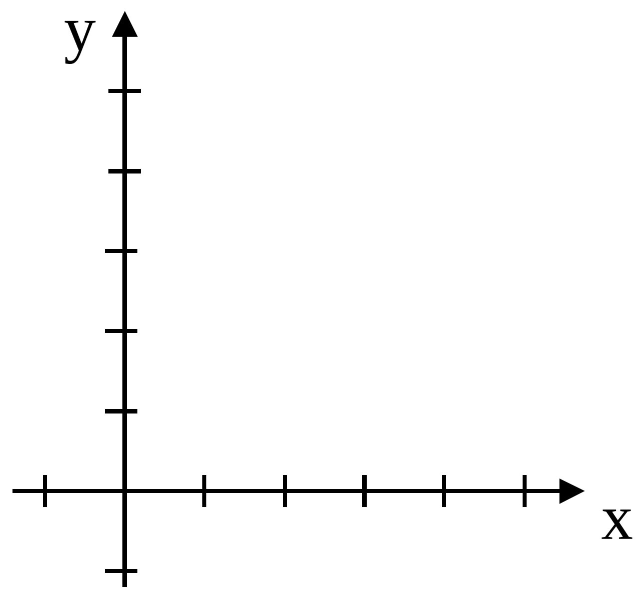
$$(y-6) = -\frac{1}{3}(x-30)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 16$$

$$p = -\frac{1}{3}x + 16$$

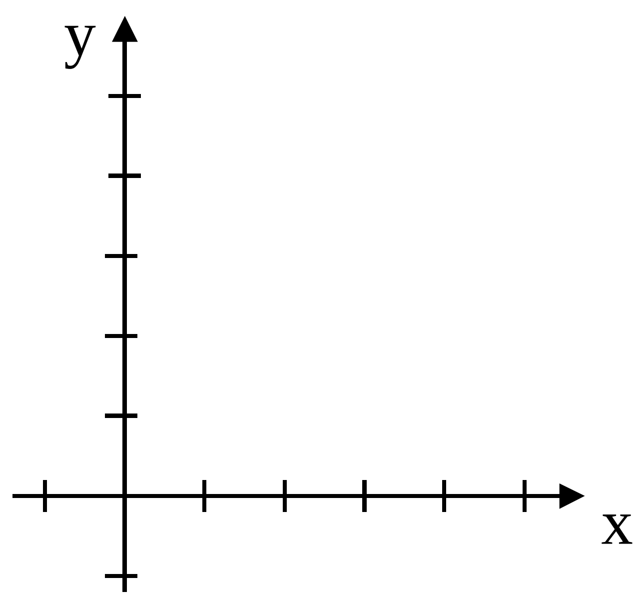


Exercício 1) Dez relógios de pulso são vendidos quando o seu preço é R$ 80,00; 20 relógios são vendidos quando o seu preço é R$ 60,00. Qual é a equação da demanda ? Trace o gráfico.



Resposta: $y = -2x + 100$

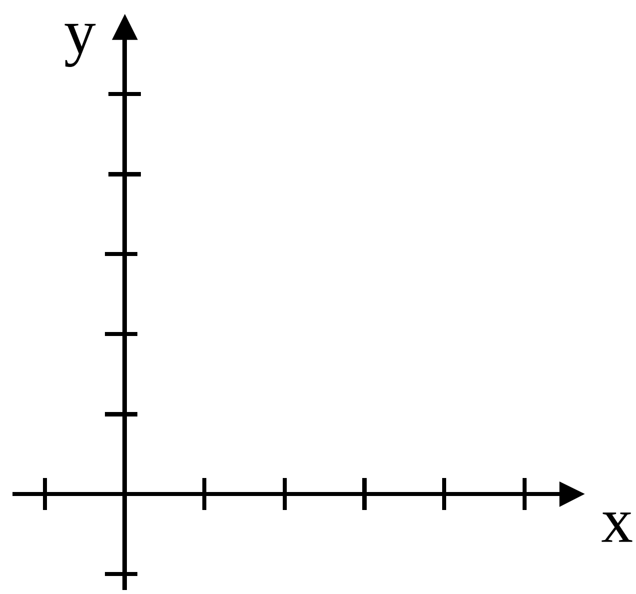
Exercício 2) Uma firma analisou suas vendas e conclui que seus clientes irão comprar 20% a mais de unidades dos seus produtos para cada redução de R$ 2,00 no preço unitário. Quando preço é R$ 12,00 a firma vende 500 unidades. Qual a equação da demanda para esse produto, trace o gráfico.



Resposta: $y = -\frac{x}{50} + 22$

As **equações de oferta** em geral são positivas, isto é , a medida que o preço aumenta a oferta aumenta. Nesse caso só interessam os valores positivos de *x* e *y*.

Exercício 3) Quando o preço for de R$ 50,00, 50 máquinas fotográficas estão disponíveis no mercado; quando o preço for de R$ 75,00 , 100 máquinas estão disponíveis. Qual a equação da oferta ? Trace o gráfico.



Resposta: $y = \frac{x}{2} + 25$

Capítulo 4 - Método dos Mínimos Quadrados (Regressão Linear)

O método dos mínimos quadrados é um modelo matemático que determina a reta que pode representar (se ajustar a) uma série de valores *x* e *y* que não se alinham perfeitamente.

Exemplo: A tabela abaixo nos fornece a receita total anual das vendas de uma fábrica durante os seus primeiros 04 anos de operação, onde *x* é o número de anos em operação e *y* é o número de milhões em vendas anuais.

x	1	2	3	4
y	5	8	7	12

A reta denominada **reta de regressão** é escrita no formato **y = mx + b** , onde os valores de m e b são o resultado de um sistema de duas equações do 1º grau demonstradas abaixo:

$$\begin{cases} \left(\sum x_i^2\right)\cdot m + \left(\sum x_i\right)\cdot b = \sum\left(x_i \cdot y_i\right) \\ \left(\sum x_i\right)\cdot m + n\cdot b = \left(\sum y_i\right) \end{cases}$$ onde n é o número total de pontos

Portanto monta-se a seguinte tabela:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	5	1	5
2	8	4	16
3	7	9	21
4	12	16	48
$\sum = 10$	$\sum = 32$	$\sum = 30$	$\sum = 90$

E resolve-se o sistema:

$$\begin{cases} \left(\sum x_i^2\right)\cdot m + \left(\sum x_i\right)\cdot b = \sum\left(x_i \cdot y_i\right) \\ \left(\sum x_i\right)\cdot m + n\cdot b = \left(\sum y_i\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30\cdot m + 10\cdot b = 90 \\ 10\cdot m + 4\cdot b = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30\cdot m + 10\cdot b = 90 \\ 30\cdot m + 12\cdot b = 96 \end{cases} \Rightarrow -2\cdot b = -6 \Rightarrow b = 3$$

Substituindo:

$10\cdot m + 4\cdot 3 = 32$

$10\cdot m = 32 - 12$

$m = \frac{20}{10} = 2$

Resposta: a equação de reta que se melhor ajusta é : y = 2x + 3

Exercícios: Determine a reta de regressão para os seguintes dados:

a)

x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	3		
3	5		
5	6		
7	5		
9	7		
11	8		
$\sum =$	$\sum =$	$\sum =$	$\sum =$

Resp: $y = \frac{3}{7}x + \frac{65}{21} \Rightarrow 9x - 21y + 65 = 0$

b) Um quadro foi comprado em 1965 por U$ 1200. Seu valor era U$ 1800 em 1970, U$ 2500 em 1975, e U$ 3500 em 1980. Qual o seu valor em 1990 ?

x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
$\sum =$	$\sum =$	$\sum =$	$\sum =$

Resp: $y = 152x + 1110 \Rightarrow y(25) = 4910$

c) Na tabela abaixo, *x* dias passaram-se desde o aparecimento de certa doença, e *y* é o número de novos casos da doença no *x-ésimo* dia. (a) Ache a reta de regressão para os pontos dados. (b) Use a reta de regressão para estimar o número de novos casos da doença no sexto dia.

x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	20		
2	24		
3	30		
4	35		
5	42		
$\sum =$	$\sum =$	$\sum =$	$\sum =$

Resposta: a) y = 5,5x + 13,7   b) 47

BIBLIOGRAFIA:

DANTE, L. R. Matemática: Contexto e Aplicações. São Paulo: Editora Ática, 1999.

GIOVANNI, J. R., BONJORNO, J. R., GIOVANNI Jr, J. R. Matemática Fundamental. São Paulo: Editora FTD Ltda, 1994.

LEITHOLD, L. Matemática Aplicada à Economia e Administração. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1988.

MEDEIROS, Matemática Básica para Cursos Superiores. São Paulo: Editora Atlas S.A., 2002.

WEBER, J. E. Matemática para Economia e Administração. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 2ª ed. 1986.